Данная серия методичек посвящается лучшему семинаристу по электроду
рассказчику баек
и программы мехмата и НМУ
стильно и модно одетому, всегда и везде
рассказавшего мне про модель Изинга
и улыбчивому, как Степаньянц и Страупе
дающему позитивное настроение на весь семинар… да не, на всю неделю

Пояснение: Шишанин до МГУ несколько лет преподавал в МГТУ им. Баумана

Семинарист: Вы читали сказки Пушкина? А в театр ходили? У меня в Бауманке был студент, который постоянно доставал билеты в театр. Пригласил меня в театр… на сказки Пушкина. Я сходил. Потом спросил студента, его мнение. Он ходил… четыре раза.

Семинарист: А ещё у меня были два студента (из Бауманки)… которые пропали после майских (праздников). Сразу же. У одного фамилия Борщ, а у другого Жирницкий.
Группа: Потому что они все майские бухали ахахаха ну бомонцы же там все бухают

В прошлый раз мы познакомились с одним из 4-векторов, соединённом из энергии и импульса.

Если наш обычный мир галилеевских преобразований населяют:
Скаляры
3-векторы
Матрицы 3x3 (квадрупольный момент, тензор инерции, тензор поляризации)…
Матрицы 3x3x3 (октупольный момент)
И т.д

То мир Эйнштейна населяют:
Скаляры
4-векторы
Матрицы 4x4
И т.д.

Познакомимся с жителями этого мира Эйнштейна.

Какие ещё существуют четыре-векторы, помимо 4-вектора энергии-импульса (можно его писать $\{E, \mathbf{p}c\}$, можно $\{E/c, \mathbf{p}\}$)? Это
4-вектор пространства-времени $\{ct, \mathbf{r}\}$ или $\{t, \mathbf{r}/c\}$
4-вектор плотности заряда-тока $\{c\rho, \mathbf{j}\}$ или $\{\rho, \mathbf{j}/c\}$,
4-вектор электромагнитного потенциала $\{\varphi, \mathbf{A}\}$.
Кстати, обратите внимание на последний – φ и $\mathbf{A}$ одной размерности, нам даже не пришлось что-то на с домножать для подгонки размерности. Это всё благодаря СГС.

Как нам вообще пришла в голову идея соединить объёмную плотность заряда и плотность тока?
Мы написали закон сохранения заряда в дифференциальной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{j} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial x^0}(c\rho) + \frac{\partial j^1}{\partial x^1} + \frac{\partial j^2}{\partial x^2} + \frac{\partial j^3}{\partial x^3} = 0$$

И тут удобно ввести 4-вектор {cρ, **j**}, для которого мы скажем, что 4-дивергенция равна нулю. Что такое 4-дивергенция?
Это мы первую компоненту 4-вектора дифференцируем по ct, вторую – по x, третью – по y, четвёртую – по z, и всё суммируем.

Т.е. если у нас есть 4-вектор

$$\{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3\}$$

То его 4-дивергенцией будет

$$\frac{\partial \xi_0}{ct} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \xi_2}{\partial y} + \frac{\partial \xi_3}{\partial z}$$

Итак, закон сохранения заряда в дифференциальной форме запишется как

$$\operatorname{diiv}\left\{\rho, \frac{\bar{j}}{c}\right\} = 0$$

Специального обозначения для 4-дивергенции нет, я буду писать её как diiv. Ну типа обычная дивергенция – div, три буквы, а 4-дивергенция - diiv, три буквы.

Кстати, а как нам пришла в голову идея объединить φ и **A**?
У нас есть два уравнения

$$\begin{cases} \Delta\varphi - \dfrac{1}{c^2}\ddot{\varphi} = \rho \\ \Delta\vec{A} - \dfrac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} = j/c \end{cases}$$

Перепишем их через оператор Даламбера, который по определению равен

$$\Box f = \Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Nota bene! Иногда за оператор Даламбера принимают противоположную величину $\Box u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u$. Я введу Даламбера так, как ввёл его Денисов, чтобы синхронизовать обозначения с его учебником.

Получим:

$$\Box\,\varphi(\mathbf{r},t) = -4\pi\rho(\mathbf{r},t),$$

$$\Box\,\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = -\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$$

Ну раз мы ρ и **j**/c объединили в один 4-вектор, то и φ и **A** можно объединить в один:

$$\Box\left\{\varphi, \vec{A}\right\} = -4\pi\left\{\rho, \frac{\vec{j}}{c}\right\}$$

Собственно, это уравнение (совместно с ЗСЗ в диффренциальной форме $\mathrm{diiv}\left\{\rho, \frac{\vec{j}}{c}\right\}=0$) – это все уравнения Максвелла. Вся электродинамика выводится отсюда.

Ну и если для 3-дивергенции нам пришлось ввести её аналог в мире Эйнштейна – 4-дивергенцию, то аналог оператора Лапласа – оператор Даламбера.

Важно: преобразования Лоренца относятся не только к 4-вектору пространства-времени {ct, **r**} или {t, **r**/c}, но и к любому 4-вектору. В частности,

$$\rho = \frac{\rho' + \frac{V}{c^2} j'_x}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$j_x = \frac{j'_x + V\rho'}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$j_y = j'_y, \qquad j_z = j'_z.$$

И

$$\varphi = \frac{\varphi' + \beta A'_x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad A_x = \frac{A'_x + \beta\varphi'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad A_y = A'_y, \quad A_z = A'_z$$

Аналогично для энергии-импульса, я уж не буду писать.
На самом деле не такие уж эти преобразования и противные. Почему они нам кажутся противными? Потому что первый раз мы с ними знакомимся, мы знакомимся с ними на примере координат и времени. Нашему мозгу очень сложно принять неинвариантность времени и её связь с пространством. Что, казалось бы, может быть общего у времени и пространства?
То, что энергия и импульс – это компоненты одного 4-вектора, нам воспринимать уже гораздо проще (тем более что мы знаем, что есть ЗСЭ и есть ЗСИ), ну а φ и **A** мы и вовсе давно хотели в один 4-вектор объединить – 4-вектор электромагнитного потенциала. Так что как только мы узнали, что СТО – это не только пространство-время, но и объединение двух потенциалов в один, она нам сразу стала приятней.

То, что преобразования линейны, позволяет нам записать их в т.ч. и в матричном формате. Например, можно ввести величину θ (она называется «быстрота», это общепринятый термин) такую, что th θ = v/c=β. Тогда правило преобразования ЛЮБОГО 4-вектора запишется как

$$\begin{bmatrix} \xi'_0 \\ \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\theta & -\operatorname{sh}\theta & 0 & 0 \\ -\operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$$

А что насчёт скаляров? Скаляры – это инварианты, т.е. не зависящие от выбора системы координат.
В мире Галилея такой была, например, масса. В мире Эйнштейна – энергия покоя (собственно, это одно и то же, с точностью до константы c^2). А помните, как мы её получали? Вычисляли псевдоквадрат нормы E^2-$(\mathbf{p}c)^2$ и говорили, что эта величина одинакова во всех СК. В частности, в системе, где $\mathbf{p}=\mathbf{0}$ (т.е. в системе центра масс тела) это E^2 – собственная энергия тела (энергия покоя).
Аналогичный трюк можно проделывать с любыми 4-векторами и получать для каждого 4-вектора свой скаляр-инвариант.

Например, $\{\varphi, \mathbf{A}\}$. Величина φ^2-$\mathbf{A}^2$ является инвариантом системы координат. Т.е. если мы дома померили скалярный потенциалы вершины шпиля ГЗ МГУ (предположим, что там сидит заряд), а потом сели в автобус, где эта вершина начала двигаться (в системе автобуса, конечно), то хоть у неё и появился векторный потенциал и изменился скалярный, величина φ^2-$\mathbf{A}^2$ будет одинаковой у шпиля в любой системе координат – нашего неподвижного дома, автобуса или тарелки инопланетян. И не только шпиля, но и любой точке пространства.
А физический смысл этого инварианта – квадрат потенциала в СК, где этот заряд покоится. Там векторного потенциала не будет, будет только скалярный.
Аналогия с энергией покоя ну прямо прослеживается.

Инвариант 4-вектора пространства-времени вам наверняка уже рассказывали на общефизе – это пространственно-временной интервал

$$ds^2 = c^2dt^2 - (d\mathbf{r})^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Правда, не все физические величины мы пока что не объединили в 4-векторы. Например, непонятно, с чем объединять 3-вектор скорости и 3-ускорения. Помните формулы для преобразования скоростей? Вот они противные-противные (в частности, нелинейные), потому что скорость пока не объединена с чем-то в 4-вектор. Также непонятно, куда девать такую важную величину, как момент импульса **L**. Ну и с **E** и **H** непонятно. Обе векторы, так что слить их в 4-вектор не получится. А вот в 4-матрицу получится:

$$\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}$$

Поподробней об этом в следующий раз.

Чек-лист:

1) Мы знаем четыре 4-вектора: {E, **p**c} или {E/c, **p**}, {ct, **r**} или {t, **r**/c}, {cρ, **j**} или {ρ, **j**/c},{φ, **A**}.
2) Познакомились с 4-дивергенцией 4-вектора.
3) Познакомились с оператором Даламбера для тех, кто не был с ним знаком.
4) Знаем 4 инварианта по числу известным нам 4-векторов.
5) Улучшили понимание преобразований Лоренца.